

一类广义非扩张映射的不动点性质

张少勇, 朱 鹏

(哈尔滨理工大学 理学院, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘 要: 将 W. Kirk 最著名的结果: 具有正规结构自反的 Banach 空间关于非扩张映射具有不动点性质, 推广到更加一般的映射形式, 即: $\|T(x) - T(y)\| \leq a_1(t)(d(x, y))\|x - y\| + a_2(t)(d(x, y))\|x - T(x)\| + a_3(t)(d(x, y))\|x - T(y)\|$, 其中 $\sum_{i=1}^3 a_i(t) \leq 1$, 且 $a_i(t): (0, +\infty) \rightarrow (0, 1)$ 单调递减, 研究了具有正规结构自反的 Banach 空间关于上述映射具有不动点性质。

关键词: 广义非扩张映射; 正规结构; 自反性; 不动点性质

DOI: 10.15938/j.jhust.2019.05.024

中图分类号: O177.3 文献标志码: A 文章编号: 1007-2683(2019)05-0145-04

The Fixed Point Property of a Class of Generalized Non-expansive Mappings

ZHANG Shao-yong, ZHU Peng

(School of Applied Science, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: In this paper, the most famous result by W. Kirk is that the non-expansive mapping has the fixed point property in a Banach space with normal structure reflexive is extended to a more general form of mapping, namely: $\|T(x) - T(y)\| \leq a_1(t)(d(x, y))\|x - y\| + a_2(t)(d(x, y))\|x - T(x)\| + a_3(t)(d(x, y))\|x - T(y)\|$, where $a_i(t): (0, +\infty) \rightarrow (0, 1)$ monotone decreases, a reflexive Banach space X with normal structure has the fixed point property for the mapping mentioned above.

Keywords: generalized non-expansive mapping; normal structure; reflexive; fixed point property

0 引 言

1912年,德国数学家 Brouwer 在运用度理论在拓扑学的基础上,证明了关于连续单值映射的一个著名的不动点定理^[1-4]。后来 Schauder, Kakutani 等人又相继对 Brouwer 的结果进行推广^[5-9]。

不动点理论的研究一直都是数学研究的热门问

题。许多年来,许多数学工作者通过各种方法不断丰富不动点理论,把单值压缩映射的不动点定理推广到多值映射的情况^[10-13]。20世纪初, Banach 提出了著名的 Banach 压缩映射原理。Banach 压缩映射的一种自然推广是非扩张映射, R. de Marr 得到了一个关于非扩张映射不动点理论的重要结果,它是著名的 Kakutani-Marko 不动点定理的推广^[16-19]。此后不久, Brouwer, Kirk, Petryshyn 分别讨论了定义

收稿日期: 2018-05-09

基金项目: 国家自然科学基金(11781181)。

作者简介: 朱 鹏(1994—),女,硕士研究生。

通信作者: 张少勇(1963—),男,副教授, E-mail: 13904603565@139.com。

在距离空间有界闭凸集上的非扩张映像不动点存在性,将其部分结果推广到平均非扩张映射的情形^[2]。

1 预备知识

本文以 X 表示 Banach 空间。

定义 1^[1] 映像 $T: X \rightarrow X$, 若存在 $x^* \in X$, 使得 $x^* = T(x^*)$, 则称 x^* 为映像 T 的不动点。

定义 2^[2] 若 C 是 X 的非空有界闭凸子集, $T: C \rightarrow C$. 如果是指对于 $\forall x, y \in C$, 有 $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$, 则称 T 为 C 到其自身的非扩张映射。

定义 3 称 Banach 空间 X 具有不动点性质 (FPP) 是指定义在 X 每一个非空有界闭凸子集上的非扩张自映射具有不动点。称 Banach 空间 X 具有弱不动点性质 (WFPP) 是指 X 上的每一个弱紧凸子集的非扩张自映射具有不动点。

定义 4 设 K 是 Banach 空间 X 的任一子集, 称 K 具有正规结构是指对 K 的任意有界的凸子集 H , H 不是单点集, 存在 $x_0 \in H$, 使得

$$\sup\{\|x_0 - x\| : x \in H\} < \text{diam}(K) =$$

$$\sup\{\|x - y\| : x, y \in H\}$$

其中 x_0 为非直径点。

定义 5 设 C 是 X 中的弱紧凸子集, $T: X \rightarrow X$, 称 C 是 T 的最小不变子集是指 C 中不存在有界闭凸真子集 A 满足 $T(A) \subset A$ 。

定义 6 设 (X, d) 是一个距离空间, $T: X \rightarrow X$, 称序列 $\{x_n\} \subseteq X$ 为 T 的渐近不动点序列 (afps) 是指当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $d(x_n, Tx_n) \rightarrow 0$ 。

定义 7 设 $\{x_n\}$ 为 Banach 空间 X 中的序列, 其渐近半径和渐近中心是指 X 的子集 B 定义:

$$r_a(\{x_n\}, B) = \inf\{\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\| : y \in B\},$$

$$z_a(\{x_n\}, B) = \{y \in B : \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\| = r_a(\{x_n\}, B)\}$$

则称 $r_a(\{x_n\}, B)$ 和 $z_a(\{x_n\}, B)$ 分别为 B 的渐近半径和渐近中心。当 $B = \overline{\text{cov}(\{x_n\})}$ 时, 分别记 $r_a(\{x_n\}, \overline{\text{cov}(\{x_n\})})$ 和 $z_a(\{x_n\}, \overline{\text{cov}(\{x_n\})})$ 为 $r_a(\{x_n\})$ 和 $z_a(\{x_n\})$ 。

定义 8 在 Banach 空间 X 中, 设 $D \subseteq X$ 为有界闭凸集, 记

$$r_x(D) = \sup\{\|x - v\| : v \in D\}$$

$$r(D) = \inf\{r_x(D) : x \in D\}$$

$$C(D) = \{z \in D : r_z(D) = r(D)\}$$

$r(D)$ 和 $C(D)$ 分别称为 D 的 Chebyshev 半径和

Chebyshev 中心。

显然, $\frac{\text{diam}(D)}{2} \leq r(D) \leq \text{diam}(D)$, 若 $r(D) =$

$\text{diam}(D) > 0$, 则称集合 D 为直径集。

引理 1^[3] Banach 空间 X 为自反的充分必要条件是 X 任意闭凸子集列

$$A_n \subset A_{n-1}, \text{ 有 } \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \varnothing.$$

引理 2^[4] Zorn 引理: 若偏序集 S 的每一个全序子集都有一个上确界, 则 S 有极大元。

定理 1^[5] Kirk 结果: 设 X 是自反的 Banach 空间, 且有正规结构, $T: C \rightarrow C$, 则 T 具有不动点。

2 主要结果及证明

本文是将著名的 Kirk 结果推广到一类非扩张的映射。

定理 1 若 X 是自反的且具有弱正规结构的 Banach 空间, $C \subseteq X$ 是有界凸集, $T: C \rightarrow C$ 连续, 并且

$\sum_{i=1}^3 a_i(t) \leq 1$, 其中 $a_i(t) : (0, +\infty) \rightarrow (0, 1)$ 单调递减, 对 $\forall x \neq y$, 有

$$\|T(x) - T(y)\| \leq a_1(t)(d(x, y))\|x - y\| +$$

$$a_2(t)(d(x, y))\|x - T(x)\| +$$

$$a_3(t)(d(x, y))\|x - T(y)\|,$$

则 T 在 X 中存在不动点。

证明: (I) 证明存在渐近不动序列

由于 C 有界, 设 $\|y\| \leq M, \forall y \in C$, 固定 $x_0 \in$

C , 定义 $T_n(x) = \frac{x_0}{n} + \frac{n-1}{n}T(x)$, 有

$$\|T_n(x) - T_n(y)\| =$$

$$\left\| \frac{x_0}{n} + \frac{n-1}{n}T(x) - \left(\frac{x_0}{n} + \frac{n-1}{n}T(y) \right) \right\| =$$

$$\left\| \frac{n-1}{n}(T(x) - T(y)) \right\| =$$

$$\frac{n-1}{n}\|T(x) - T(y)\|$$

则 T_n 为压缩映射。

从而 $\exists x_n \in C$, 使得 $x_n = T_n(x_n)$, 于是 $\|T_n(x_n) - x_n\| = 0$, 故

$$\|x_n - T(x_n)\| = \|x_n - T_n(x_n) + T_n(x_n) - T(x_n)\| \leq$$

$$\|x_n - T_n(x_n)\| + \|T_n(x_n) - T(x_n)\| =$$

$$\|T_n(x_n) - T(x_n)\| =$$

$$\left\| \frac{x_0}{n} + \frac{n-1}{n}T(x_n) - T(x_n) \right\| \leq$$

$$\frac{\|x_0\|}{n} + \frac{1}{n} \|T(x_n)\| \leq \frac{2M}{n} \rightarrow 0$$

因此存在渐近不动点序列,即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - T(x_n)\| = 0$ 。

(II) 证最小不变子集的存在性

设 $\Gamma = \{D \subseteq C, D \text{ 是 } C \text{ 的闭凸子集}, D \neq \varnothing, T(D) \subseteq D\}$ 。

显然, Γ 非空,且每一个单调递减的子列都有下界,由 Zorn 引理, Γ 存在极小元,记作 D_0 。

由最小不变子集的性质可知,对于 $\forall x \in D_0$,有

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| \leq D(D_0)$ 。事实上,任取一点 $x \in D_0$,有

则 $\{\|x_n - x\|\}_{n=1}^{+\infty}$ 为有界数列, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\| \leq s$,

令 $D_s = \{z \in D_0: \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\| \leq s\}$, 则

1) 因为 $x \in D_s$, 所以 $D_s \neq \varnothing$

2) D_s 是凸集

因为 $\forall z_1, z_2 \in D_s, \lambda \in (0, 1)$, 有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - (\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2)\| &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \lambda x_n + \lambda x_n - \lambda z_1 - (1-\lambda)z_2\| &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n + (1-\lambda)x_n - \lambda x_n - \lambda z_1 - (1-\lambda)z_2\| &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|\lambda(x_n - z_1) - (1-\lambda)(x_n - z_2)\| &\leq \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (\|\lambda(x_n - z_1)\| + \|(1-\lambda)(x_n - z_2)\|) &\leq \\ \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z_1\| + (1-\lambda) \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z_2\| &\leq \\ \lambda s + (1-\lambda)s = s \end{aligned}$$

故 D_s 是凸集。

3) D_s 为 T 的不变子集,即证在 $T: D_s \rightarrow D_s$ 非扩张映射中,对于 $\forall z \in D_s$,有 $T(z) \in D_s$ 。

因为 $a_1(t) + a_2(t) + a_3(t) \leq 1$, 所以有

$$d \leq \frac{a_1(t) + a_2(t)}{1 - a_3(t)} s \leq s$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - T(z)\| &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - T(x_n) + T(x_n) - T(z)\| &\leq \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - T(x_n)\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|T(x_n) - T(z)\| &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|T(x_n) - T(z)\| &\leq \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_1(t)(d(x_n, z))\|x_n - z\| + \\ a_2(t)(d(x_n, z))\|x_n - T(x_n)\| + \\ a_3(t)(d(x_n, z))\|x_n - T(z)\|\} &\leq s \end{aligned}$$

从而 $T(z) \in D_s$, 即 $T(D_s) \subseteq D_s$ 。

又由于 $D_s \subseteq C, D_s$ 为 T 上的不变闭凸子集,且 C 是 T 的最小不变子集,因此, $D_s = C$ 。

③ $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = D(C)$, 且渐近不动点序列的

子列仍是渐近不动点序列,所以对于任意子列 $\{x_{n_i}\} \subset \{x_n\}$ 有 $\lim_{i \rightarrow \infty} \|x_{n_i} - T(x_{n_i})\| = 0$ 。

假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = t$, 使得 $\{x_{n_i}\} \subset \{x_n\}$ 满足,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = t$, 因此 $t = D(C)$, 即 $\forall x \in C$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = D(C)$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = s$ 。

故 D_s 为 T 的最小不变子集

(III) 证明 $s = D(D_s)$

考虑集合 $F = \{u \in C: \|u - x\| \leq s, \forall x \in D_s\}$ 则 F 非空。

由于 $\{x_n\}$ 是弱序列紧的,故 $\exists x' \in C$, 使得 $x_{n_i} \xrightarrow{w} x'$, 利用范数的弱下半连续性,对于 $\forall u \in C$, 有 $\|u - x'\| \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \|u - x_{n_i}\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|u - x_n\| \leq s$, 即 $x' \in F$ 。

现设 $s < D(D_s)$, 由于 D_s 是最小不变子集,往证, $\overline{\text{Cov}(T(D_s))}$ 也是不变子集。

$\forall x \in \overline{\text{Cov}(T(D_s))}$, $\exists y_n \in \text{Cov}(T(D_s))$ 使得 $y_n \rightarrow x$, 从而 $T(y_n) \rightarrow T(x)$, 且 $T(y_n) \subset T(D_s) \subset \text{Co}T(D_s)$ 。

故 $T(x) \in \overline{\text{Cov}T(D_s)}$,

即 $\overline{\text{Cov}T(D_s)}$ 闭、凸且对 T 不变,但 D_s 极小,从而 $\overline{\text{Cov}(T(D_s))} = D_s$ 。

对于 $\forall x \in D_s = \overline{\text{Cov}(T(D_s))}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_i \in D_s$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 使得

$$\|x - \sum_{i=1}^n \lambda_i T(x_i)\| < \varepsilon$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

设 $w \in F$, 则

$$\begin{aligned} \|T(w) - x\| &= \|T(w) - x - \sum_{i=1}^n \lambda_i T(x_i) + \sum_{i=1}^n \lambda_i T(x_i)\| \leq \\ \|T(w) - \sum_{i=1}^n \lambda_i T(x_i)\| + \|x - \sum_{i=1}^n \lambda_i T(x_i)\| &\leq \\ \|T(w) - \sum_{i=1}^n \lambda_i T(x_i)\| + \varepsilon &\leq \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i \|T(w) - T(x_i)\| + \varepsilon &\leq \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i \{a_1(t)(d(w, x_i))\|w - x_i\| + \\ a_2(t)(d(w, x_i))\|w - T(w)\| + \\ a_3(t)(d(w, x_i))\|w - T(x_i)\|\} + \varepsilon &\leq s + \varepsilon \end{aligned}$$

由于 $\varepsilon, x \in D_s$ 的任意性,所以 $T(w) \in F$, 即 $T(D_s) \subseteq D_s$ 。因为 D_s 为 T 的不变子集是最小不变子集,因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = D(D_s) = s$ 。

若 D_s 不是单点集,即有 $D_s = \{x_1, x_2, \dots\}$, 由于

D_s 具有正规结构, 则 $\exists x_C \in D_s$, 使得

$$\alpha = \sup_{x \in D_s} \|x_C - x\| < D(D_s)$$

又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = D(D_s)$, 与上式中 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| < D(D_s)$ 矛盾, 故 D_s 是单点集, 证毕。

参 考 文 献:

- [1] 崔云安. Banach 空间几何理论及应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2011: 31.
- [2] 陈汝栋. 不动点理论及应用 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2012, 1: 58.
- [3] 张石生. 不动点理论及应用 [M]. 重庆: 重庆出版社, 1984.
- [4] 姚永红, 陈汝栋, 周海云. 非扩张映象不动点的迭代算法 [J]. 数学学报, 2007, 50(1): 139.
- [5] PATHAK H K, CHO Y J, KANG S M. An Application of Fixed Point Theorems in Best Approximation Theory [J]. International Journal of Mathematics & Mathematical Sciences, 2016, 21(3): 467.
- [6] CHANDOK S, KHAN M S, RAO KPR. Some Coupled Common Fixed Point Theorems for a Pair of Mappings Satisfying a Contractive Condition of Rational type Without monotonicity [J]. International Journal of Mathematical Analysis, 2016, 7(9): 433.
- [7] L. C. ZENG, On the Existence of Fixed Points for Mappings of Asymptotically Nonexpansive Type [J]. J. Systems Sci. Complexity, 2004, 17: 188.
- [8] 俞鑫泰. Banach 空间几何理论 [M]. 上海: 华东师范大学出版社, 1986: 1.
- [9] GOCKENBACH M S, KHAN AA. Identification of Lame Parameters in Linear Elasticity: a Fixed Point Approach [J]. Journal of Industrial & Management Optimization, 2017, 1(4): 487.
- [10] KOHLENBACH U, LEUSTEAN L. Asymptotically Nonexpansive Mappings in Uniformly Convex Hyperbolic Spaces [J]. European Mathematical Society, 2007, 12: 71.
- [11] SHIMIZU T, TSKAHASHI W. Fixed Points of Multivalued Nonexpansive Mappings in Certain Convex Metric spaces [J]. Topological Methods in Nonlinear Analysis, 1996, 8: 197.
- [12] ABBAS M, NAZIR T. Fixed Point of Generalized Weakly Contractive Mappings in Ordered Partial metric Spaces [J]. Fixed Point Theory and Applications, 2012, 2012(1): 1.
- [13] KOVACS L G, WALL G E. Involutory Automorphisms of Groups of Odd Order and Their Fixed Point Groups [J]. Nagoya Mathematical Journal, 2016, 27(1): 55.
- [14] Z GU, Y LI. Approximation Methods for Common Fixed Points of Meannnonexpansive Mapping in Banach Spaces [J]. Fixed Point Theory & Applications, 2008, 2008(1): 471.
- [15] 梁嘉宁, 黎永锦. 平均非扩张映射的三种迭代收敛的等价性 [J]. 内蒙古师大学报(自然汉文版), 2011, 40(6): 575.
- [16] KIRK W A. A Fixed Point Theorem for Mappings Which Do Not Increase Distances [J]. American Mathematical Monthly, 1965, 72(9): 1004.
- [17] 张石生, 黄发伦. 关于 Banach 空间中平均非扩张映象的不动点理论 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 1975(2): 73.
- [18] GARCIA FALSET J. Stability and Fixed Point Fornonexpansive Mappings [J]. Houston Journal of Mathematics, 1994, 20(3): 842.
- [19] BETIUK-PILARSKA A, WISNICKI A. On the Suzuki Nonexpansive-Type Mappings [J]. Annals of Functional Analysis, 2013, 4(2): 72.
- [20] BENAVIDES T D. A Geometrical Coefficient Implying the Fixed Point Property and Stability Results [J]. Houston Journal of Mathematics, 1996, 22(4): 835.
- [21] J M Wang, LL Chen, Y A CUI. The Fixed Point Property of Mean Nonexpansive Mapping [J]. Journal of Natural Science of Heilongjiang University, 2006, 23(3): 298.
- [22] Z ZUO. Fixed Point Theorems for Meannnonexpansive Mappings in Banach Spaces [J]. Abstract and Applied Analysis, 2014, 2014(13): 1.
- [23] BETIUK-PILARSKA A, BENAVIDES T D. The Fixed Point Property for Some Generalized Nonexpansive Mappings and Renormings [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2015, 429(2): 800.
- [24] KIM JK, PATHAK R P, DASHPUTRE S, et al. Fixed Point Approximation of Generalized Nonexpansive Mappings in Hyperbolic Spaces [J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2015, 2015: 6.
- [25] KIRK W A. Non-expansive Mappings in Product Spaces, Set-valued Mappings and K Uniform Rotundity // Browder F E. Nonlinear Functional Analysis and Its Application. Amer. Math. Soc. Symp. Pure Math, 1986, 45: 51.

(编辑: 王 萍)